Dept. de Vibraciones y Aeroelasticidad
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

AEROELASTICIDAD DINÁMICA («FLUTTER»)

OBJETIVO: Ejercitar el planteamiento de las ecuaciones aeroelásticas de *Flutter* en casos distintos al caso nominal de teoría.

Enunciado: Se desea analizar la influencia del motor de un avión en la velocidad de *flutter* de la aeronave. Para simplificar el problema, el ala del avión se representa por una sección de la misma y el efecto estructural del resto del ala sobre dicha sección se representa por muelles de rigidez a flexión K_h y torsión K_α. El motor se representa por una masa puntual concentrada de valor M_R suspendida del ala por un muelle de rigidez K_R y situada a una distancia x_R del origen de coordenadas, que a su vez coincide con el eje elástico (ver figura).
El motor en situación nominal tiene una rigidez de unión al ala K_R cercana al infinito. Sin embargo, la variación de K_R refleja un caso de fallo de la unión que se debe certificar en el diseño de la aeronave.
Tomando como coordenadas generalizadas el desplazamiento vertical del perfil h positivo hacia abajo, el giro respecto del eje elástico α positivo cuando el borde de ataque sube y la deformación relativa del muelle del motor con respecto al perfil z_R, se pide:

1. Determinar las ecuaciones del movimiento del sistema asumiendo flujo incompresible y amortiguamiento estructural nulo. Expresar las fuerzas aerodinámicas como Q_h y Q_α, despreciando las fuerzas aerodinámicas sobre el motor.

2. Comprobar que las ecuaciones reproducen casos extremos como $K_R = 0$ y $K_R \to \infty$. Identificar a qué corresponde cada uno de los casos anteriores.

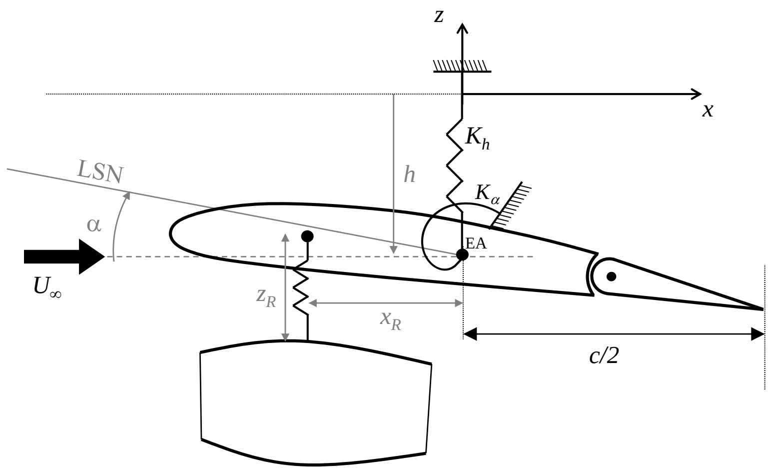

Figura 1: Sección típica con motor de masa M_R

Solución:
El movimiento del perfil se puede expresar como $w\left(x;t\right)=-h\left(t\right)-\alpha\left(t\right)x$, mientras que el movimiento del motor viene dado por $w_R\left(t\right)=-h\left(t\right)-\alpha\left(t\right)x_R-z_R$. La energía cinética del sistema es:

$$dT_{2D}=\frac{1}{2}dm\left(\dot{h}+\dot{\alpha}x\right)^2=\frac{1}{2}dm\dot{h}^2+xdm\dot{h}\dot{\alpha}+\frac{1}{2}x^2dm\dot{\alpha}^2\rightarrow T_{2D}=\frac{1}{2}M\dot{h}^2+\frac{1}{2}I_\alpha\dot{\alpha}^2+S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha}$$

$$T_R=\frac{1}{2}M_R\left(\dot{h}+\dot{\alpha}x_R+\dot{z}_R\right)^2=\frac{1}{2}M_R\dot{h}^2+\frac{1}{2}M_Rx_R^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}M_R\dot{z}_R^2+M_Rx_R\dot{h}\dot{\alpha}+M_R\dot{h}\dot{z}_R+M_Rx_R\dot{\alpha}\dot{z}_R$$

La energía potencial del sistema proviene de la deformación elástica en flexión y torsión del perfil 2D y la elongación del motor respecto al perfil:

$$U=\frac{1}{2}K_hh^2+\frac{1}{2}K_\alpha\alpha^2+\frac{1}{2}K_Rz_R^2$$

Se asume amortiguamiento estructural nulo por lo que la energía de disipación es nula, es decir, $D=0$.
Las ecuaciones de Lagrange quedan:

$$\begin{aligned}
M\ddot{h}+S_\alpha\ddot{\alpha}+M_R\ddot{h}+x_RM_R\ddot{\alpha}+M_R\ddot{z}_R+M\omega_h^2h&=Q_h\\
S_\alpha\ddot{h}+I_\alpha\ddot{\alpha}+x_RM_R\ddot{h}+x_R^2M_R\ddot{\alpha}+x_RM_R\ddot{z}_R+I_\alpha\omega_\alpha^2\alpha&=Q_\alpha\\
M_R\ddot{h}+x_RM_R\ddot{\alpha}+M_R\ddot{z}_R+M_R\omega_R^2z_R&=0
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que no se consideran cargas aerodinámicas sobre el motor y las rigideces a flexión y torsión se escriben en función de las frecuencias modales ($K_h=M\omega_h^2$ y $K_\alpha=I_\alpha\omega_\alpha^2$). Agrupando términos, las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{aligned}
\left(M+M_R\right)\ddot{h}+\left(S_\alpha+x_RM_R\right)\ddot{\alpha}+M_R\ddot{z}_R+M\omega_h^2h&=Q_h\\
\left(S_\alpha+x_RM_R\right)\ddot{h}+\left(I_\alpha+x_R^2M_R\right)\ddot{\alpha}+x_RM_R\ddot{z}_R+I_\alpha\omega_\alpha^2\alpha&=Q_\alpha\\
M_R\ddot{h}+x_RM_R\ddot{\alpha}+M_R\ddot{z}_R+M_R\omega_R^2z_R&=0
\end{aligned}$$

Adimensionalizando con M y b:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{M_R}{M}\right)\frac{\ddot{h}}{c/2}+\left(x_\alpha+\frac{x_R}{c/2}\frac{M_R}{c/2}\right)\ddot{\alpha}+\frac{M_R}{c/2}\frac{\ddot{z}_R}{c/2}+\omega_h^2\frac{h}{c/2}&=\frac{Q_h}{Mc/2}\\
\left(x_\alpha+\frac{x_R}{c/2}\frac{M_R}{M}\right)\frac{\ddot{h}}{c/2}+\left(r_\alpha^2+\frac{x_R^2}{(c/2)^2}\frac{M_R}{M}\right)\ddot{\alpha}+\frac{x_R}{c/2}\frac{M_R}{M}\frac{\ddot{z}_R}{c/2}+r_\alpha^2\omega_\alpha^2\alpha&=\frac{Q_\alpha}{M(c/2)^2}\\
\frac{M_R}{M}\frac{\ddot{h}}{c/2}+\frac{x_R}{c/2}\frac{M_R}{M}\ddot{\alpha}+\frac{M_R}{M}\frac{\ddot{z}_R}{c/2}+\frac{M_R}{M}\omega_R^2\frac{z_R}{c/2}&=0
\end{aligned}$$

Asumiendo movimiento armónico y formulando el problema en formato matricial para ser resuelto con el método Vg:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{M_R}{M} & x_\alpha+\frac{x_R}{b}\frac{M_R}{M} & \frac{M_R}{M}\\ x_\alpha+\frac{x_R}{b}\frac{M_R}{M} & r_\alpha^2+\frac{x_R^2}{b^2}\frac{M_R}{M} & \frac{x_R}{b}\frac{M_R}{M}\\ \frac{M_R}{M} & \frac{x_R}{b}\frac{M_R}{M} & \frac{M_R}{M}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/(c/2)\\ \bar{\alpha}\\ \bar{z}_R/(c/2)\end{Bmatrix}-\left(1+ig\right)\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2\begin{bmatrix}\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & r_\alpha^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega_R}{\omega_\alpha}\right)^2\frac{M_R}{M}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/(c/2)\\ \bar{\alpha}\\ \bar{z}_R/(c/2)\end{Bmatrix}=0$$

Nótese que el método Vg introduce un amortiguamiento «ficticio» g que corresponde al amortiguamiento que debe tener el sistema para que el movimiento resultante sea armónico a frecuencia ω.
El caso $K_R=0$ corresponde a $\omega_R=0$ y, sustituyendo la tercera ecuación en las dos primeras se recupera las ecuaciones del perfil 2D explicadas en las clases teóricas. El caso $K_R\rightarrow\infty$ corresponde a motor unido rígidamente al perfil, es decir, $z_R=0$. En este segundo caso, se recuperan las ecuaciones del perfil 2D pero incorporando el peso del motor en las características inerciales del perfil.